

COMSOL を使いこなそう : V53a

# 「構造力学モジュールのスタディについて」

橋口真宜

2018年2月2日

第1技術部部長

計測エンジニアリングシステム株式会社

<http://www.kesco.co.jp/>

<https://www.comsol.jp/>

注：本書は使いこなすための簡単なメモとして作成するものであり、全体を網羅するものでも詳細を記述するものでもない。読者はこれを入口にして、詳細はマニュアルや参考書で自己研鑽されることを望む。将来、このようなメモを統合してあるまとまりのある内容にしていくことはあり得る。本書に対する質問は一切受け付けない。

## 1. 構造力学モジュールのスタディの種類

COMSOL Multiphysics Ver.5.3a 時点での構造力学のスタディの種類は以下の通り。

定常解析

固有周波数解析

モード解析

時間依存解析

周波数領域解析

モード重ね合わせ

調和摂動

モード次数低減

線形化バックリング解析

ボルトプリテンション解析

以下に、各々の概要を説明する。

## 2. 定常解析

### 2. 1 利用場面

- (a) 荷重の変化が非常にゆっくりしており、慣性力を無視できる場合（準定常と呼ぶ）
- (b) 物性に時間依存性が無い場合
- (c) マルチフィジックス解析において他のフィジックスが構造解析に比べて時間的に遅い

注：粘弾性、クリープは時間依存性を持つ。

### 2. 1 荷重ケース

複数値の荷重を加える場合に利用できる。

### 2. 2 補助スイープ

非線形問題や、収束性を改善する上での荷重のランピング時に利用できる。

他のフィジックスを先に解き、そこからの **One-way** 連成として構造力学を解けば良い場合には補助スイープのパラメタとして時間を使うことができる。

### 2. 3 拘束

定常問題を収束させるには、拘束が必要である。

剛体モードつまり応力フリー下での変形が生じないようにする。

## 3. 固有周波数解析および対応する固有モードの解析

数学的な概念は、固有値  $\lambda$  である。構造力学では周波数  $f$  を扱うので、両者の変換を知っておく必要がある。

$$f = -\frac{\lambda}{2\pi i}$$

注： $\lambda = i\omega = i2\pi f$  の関係からこのようになる。

### 3. 1 スケーリング

固有値解析にともなう固有モードは形状だけが問題であり、その大きさは物理的な意味をもたないが、スケーリングを行いたい場合には、固有ベクトルのスケーリング機能を利用することで、固有ベクトル  $U$  は質量行列  $M$  と下記の関係を持つようにスケーリングされる。

$$U_i^T M U_i = 1$$

これは、構造力学分野では共通の方法である。

スケーリングの結果は、モード重ね合わせ解析の結果には影響を与えない。

しかし、エクスポートしたときのモードには影響を与える。

### 3. 2 剛体モード

拘束が完全ではなく、剛体モードがある場合には、理論的には固有値 0 をとる。

剛体モードの可能な数は以下の通り。

3D 6 個 (並進 3 個 + 回転 3 個)

2D 軸対称 1 (z 方向並進)

2D(固体力学、ビーム、トラス) 3 (2 並進 + 1 回転)

2D (板) 3 (1 並進 + 2 回転)

数値計算では、完全な 0 を算出することは難しく、負や複素数といった小さな数として算出される。

剛体モードがある場合には、固有値探索をする数値を、非 0 の数値にしておくことが重要である。

### 3. 3 減衰

減衰をモデル化した場合、固有値解析は自動的に **Damped** 固有値を算出する。

複素値で表示された場合には、実部が実際の周波数であり、虚部は減衰を表す。

レーリー減衰あるいは損失ファクタを設定した場合には、実数値で固有値を算出する。

## 4. 予応力解析

すでに荷重が印加された予応力状態の物体では、応力硬化によって、固有周波数がシフトする。

予応力解析を実施するには、固有周波数解析の箇所、幾何的非線形を含む を選択する必要がある。

予応力解析は、接触解析でも可能である。この場合、固有周波数解析は線形化を行うために利用できる。

## 5. モード解析

固体力学の 2D 平面ひずみにおいて、利用できる。

レールやパイプといった構造では弾性波が長距離を伝播できる。これは導波路という一般的な名称が与えられている。

一様断面をもつ導波路では、ある距離だけ伝播したあとは、数個の離散的な伝搬モードの和で記述できるようになる。各伝播モード波は固有の形状と位相速度を持っている。

これらのモードを支配する方程式は、線形化時間調和方程式の空間フーリエ変換によって得られる。その場合、空間依存性は進行方向である z 方向のみであると仮定できる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}e^{-ik_z z}$$

この場合、伝播定数というものがあり、ソルバーはその値も算出する。エバネッセントモードに対応している。

## 6. 時間依存解析

### 6. 1 利用場面

定常解析を使えない場合があり、その場合には時間依存解析を行なう。

- (a)慣性力が無視できずニュートン第1法則で与えられるモデルを解く必要がある場合
- (b)材料モデルが時間依存性を持つ場合（クリープや粘弾性）
- (c)荷重が時間依存性をもつ場合
- (d)非線形がある場合

慣性を含む線形問題では、直接解法よりは、モード重ね合わせ法で解くほうが効率が良い。

### 6. 2 ソルバーの選択

時間に関する2階微分を含む場合には、一般化 $\alpha$ を利用する。

慣性を含むというオプションがフィジックスですでに入っている場合には自動的に一般化 $\alpha$ が選択される。

粘弾性とクリープは時間に関する1階微分を含む。この場合はBDFを利用する。

準定常という設定をフィジックスで行っている場合にはBDFがデフォルトソルバーである。

## 7. 周波数領域解析

### 7. 1 周波数領域

これは周波数領域での定常解析を行なう。

線形問題であることが必要である。

非線形性を持つ場合には、線形化ポイント周りで計算を行う。

そのような計算は、線形化ポイント周りで微小信号解析を行なうことに対応する。

調和摂動解析と呼んでいる。

### 7. 2 位相設定

さて、周波数解析では、荷重と応答は、一般には複素数になる。

荷重ごとに位相が異なる場合には、その位相を指定できる。

指定方法としては、

荷重の位相設定があるので、それを利用する。

あるいは、

$100[\text{N}]\cdot(1+0.5\cdot i)/\text{sqrt}(1.25)$

といった入力をする。

### 7. 3 結果表示

結果は複素数である。

u そのものを表示させると、 $\text{real}(u)$ を表示する。これは位相0での解（あるいは振幅）

に相当する。

$\text{imag}(u)$  これは  $u$  の虚部を表示する。

$\text{abs}(u)$  これは  $u$  の絶対値である。

$\text{arg}(u)$  これは  $u$  の位相角である。

構造力学の計算結果には、変位  $u$  から派生した非線形項、例えば、主応力とか応力といった非線形項は注意深く取り扱う必要がある。これらは一般には調和ではない。

### 7. 3 周波数から時間領域への FFT

周波数領域の解析結果から、1 周期分の時間履歴を求めたい場合がある。

これを行うには、周波数-時間 FFT をスタディに追加する。

### 7. 4 予荷重解析

構造体に予荷重を書けたときの固有周波数のシフトは、周波数応答解析において重要である。固有周波数に近い周波数の荷重を印加する場合は特に重要である。

予荷重解析をする場合には、周波数領域解析ステップにおいて幾何的非線形性を必ず選択しておく。予荷重（周波数領域）をスタディとして選んだ場合には自動選択される。

接触解析においても予荷重を導入できる。その場合には、予荷重の後に続く周波数領域解析では、その接触状態を線形化ポイントとして、周波数解析が行われる。

### 7. 5 時間履歴の取得

周波数領域で解析した一周期の時間履歴を取得するには、周波数領域-時間 FFT をスタディステップに追加する。周波数応答解析結果は、フーリエ級数の各項として算出されており、それらを時間領域に変換する。いくつかの周波数の結果を組み合わせると時間履歴にすることはできる。ただし、同じ基本周波数をもつもののみ組み合わせができる。

## 8. モード重ね合わせ

### 8. 1 利用場面

大規模モデルのダイナミック応答解析を行なうと非常に時間がかかることがある。

モード重ね合わせを利用すれば劇的に改善する。

それを利用するには、下記的前提条件を満たす必要がある。

- (a) 解析は線形であること。構造は非線形解析を受けた後でもよいが、モード応答解析はその状態の周りでの調和摂動解析になる。
- (b) 0 でない既定変位を持つこと。
- (c) モデルの固有周波数以下の周波数範囲での荷重であること。それはモード解析が、固有

モードのいくつかを利用して計算を行うからである。波動とか衝撃タイプの荷重も除く。

(d) モード解析を時間領域で実施するとしたら、荷重は全て同じ時間依存性を持たせる必要がある。

モード重ね合わせとしては、固体力学では、

(a) 時間依存モーダル

(b) 周波数領域モーダル

の二種類のスタディがある。

これらは、固有周波数解析とモード応答という 2 つの解析を中に含んでいる。

## 8. 2 設定方法

固有周波数解析をすでに行っている場合：

1) 空スタディを追加

2) 時間依存モーダルスタディステップあるいは周波数領域モーダルスタディステップのいずれかを追加

3) デフォルトソルバーを表示

4) 生成されたモードソルバーの固有ペアに用いられるべき固有周波数解を選択

## 8. 3 変位

モード重ね合わせでは、構造変位は固有モードの線形結合で表す。これらのモードの振幅は、縮小モデルにおいて求めるべき未知数となる。どの固有モードを解析に利用するかを選択する必要がある。どれだけの固有モードを含めば良いかの目安としては、考慮する最高周波数の約 2 倍の周波数までに含まれる固有モードを選択すべきである。

モード重ね合わせでは、ダンピングの種類に制限はない。モード重ね合わせは、ダンピングの有無で得られた固有モードにあまり影響されない。

一般的な減衰を利用する場合には、固有周波数解析は減衰なしのものを計算しておくほうが良い。

## 8. 4 周波数領域解析

全ての荷重は同じ周波数の調和振動をもつ必要がある。

この解析では、調和摂動のみが解析に組み込まれる。

## 8. 5 時間依存解析

時間に独立な荷重は荷重ファクタで既定する。時間への依存性は、モード解析ソルバーの下の詳細セクションで、荷重ファクタとして既定される。

## 9. 調和摂動

### 9. 1 利用場面

周波数領域の解析では、扱っている問題が調和外力によって励起されるときに線形であるとみなせることを仮定している。

一方で、ゴムの大回転や予応力を引き起こすような荷重では、非線形性を持ちうる。

調和解析とは、予応力を印加された状態において、線形調和解析を行なうものである。

調和摂動の選択の設定ができる荷重であれば、摂動計算のできるスタディでのみ、認識される。

調和摂動の選択が設定にない場合には、そのようなスタディでは無視されてしまう。

そのような場合、調和摂動として取り扱う荷重にはオペレーター `linper()` を付けておく。

下記の表が参考になる。

TABLE 2-3: DEFAULT PERTURBATION SETTINGS FOR STRUCTURAL MECHANICS STUDY TYPES

STUDY TYPE	STUDY STEP	PERTURBATION
Frequency Domain	Frequency Domain	No
Prestressed Analysis, Frequency Domain	Stationary	No
	Frequency-Domain, Perturbation	Yes
Frequency-Domain, Modal	Eigenfrequency	N/A
	Frequency-Domain, Modal	Yes

(a) デフォルト設定のままでは、周波数領域と、周波数領域モーダル の両方のスタディに対して、同じ荷重を印加することはできない。理由は、周波数領域モーダルは、摂動荷重に対してしか適用できないからである。

(b) 周波数領域のスタディを、摂動タイプのスタディに変更できる。そのためにはソルバースーケンスを変更する。定常解析ソルバーの設定ウィンドウの一般セクションで、線形 を線形摂動 に変更する。

(c) 線形 を 線形摂動 あるいは 線形 に選んでいないソルバーは、非線形を扱えるであろう。マルチフィジックス解析で構造は線形だが他のフィジックスは非線形であるという場合が考えられるのでそのようなことは重要である。しかし、構造解析部分の中に非線形性がある場合には、ソルバー設定には注意を要する。

### 9. 2 幾何非線形性とフレーム間のスプリット

周波数領域摂動で、線形性 が選択された場合、幾何非線形性は材料フレームと空間フレームの間に飛びを持たせることがあるであろう。このことによって、フォロワー荷重からの剛性を考慮したり、線形化ポイントとして接触解を利用することができる。このフレームのスプリットは 5.3 から導入された。従って、圧力荷重、変形依存の軸方向をもつ座標系



で定義された荷重、空間の小文字で表される添え字を含んだユーザー定義を利用している場合には、5.3 より前のバージョンによる解と異なる結果が得られるかもしれない。

### 9. 3 調和摂動を利用する場合の注意点

- (a) 剛体コネクタは、調和摂動サブノードで指定でき、そこでは調和摂動値を規定して自由度を拘束できる。もし、剛体コネクタの下に印加力あるいは印加モーメントを追加したら、調和摂動を独立に指定できる。その結果、荷重は摂動として機能する。
- (b) 初期応力と初期ひずみは通常は荷重として取り扱われることはないが、初期応力と初期ひずみに調和摂動を指定することもできる。

## 10. 低次モード

### 10. 1 利用場面

物理モデルの本質的な部分を保持したまま、モデルの自由度を低減する場合に利用する。

例えば、ある固有周波数で小さなダンピングをもつ系を駆動する場合、少ないモード数で系を計算することは妥当である。ある場合では、単一モードで十分である。 $n$  自由度の系は、 $n \times n$  の大きさの質量、剛性、ダンピング行列をもつ。もし、 $m$  個のモードを利用すれば  $m \times m$  に低減できる。

### 10. 2 低減方法

- (a) 時間領域あるいは周波数領域でのモード解析用のソルバーを利用する
- (b) 等価モデルを COMSOL 以外で利用する

### 10. 3 モード座標系

$n$  自由度の機械系を考える。

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + Ku = F$$

ここで、

$$u, F \quad n \times 1$$

$$M, D, K \quad n \times n$$

周波数領域では、

$$-\omega^2 Mu_0 + i\omega Du_0 + Ku_0 = F$$

$$u = u_0 e^{i\omega t}$$

ダンピングのない系は固有値と固有関数を持つ。

固有関数はお互いに直交するので、基底関数として利用できる。

すると、解を以下のように表すことができる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{a}$$

ここで、 $\mathbf{a}$  は係数ベクトルであり、問題毎に決める必要がある未知ベクトルである。

これをもとの式に入れると、係数ベクトル  $\mathbf{a}$  の各成分ごとの方程式を得る。

ダンピング行列が無い場合には、各係数毎に独立した方程式が得られる。

#### 10.4 次数低減

先ほどの級数展開で、次数を  $m$  ( $\ll n$ ) にする。

#### 10.5 COMSOL での設定

モード次数縮小モデルスタディを利用する。

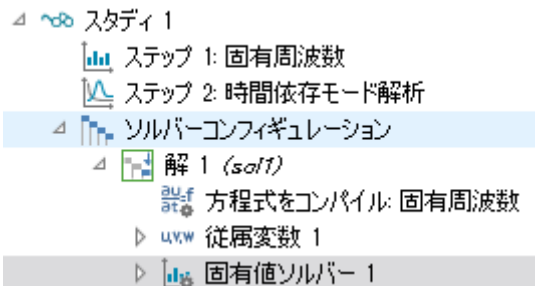
必ず、固有値解析を含むスタディがあることが前提である。

システム行列の表示

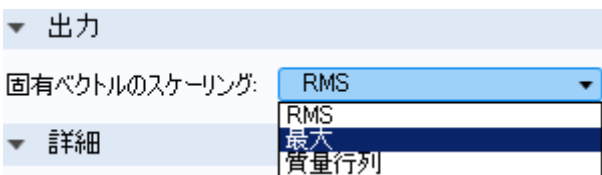
- 1) 計算後、結果：計算値を右クリックし、システム行列を選択する。
- 2) 出力セクションで、表示したい行列を選ぶ。
- 3) これらの行列はエクスポートできる。

スケーリング

ソルバーコンフィギュレーション：ソルバー 1：固有値ソルバー 1 を選び、出力セクションの固有ベクトルのスケーリングで選択を行う。



もし、質量-バネ-ダンピング系の等価モデルが必要な場合には、Max 設定を利用する。この場合、モード振幅は、モードの最大変位に対応する。



## 低次モードモデル

低次モードモデルスタディは低次モデル行列をエクスポートするときに使います。

このスタディは周波数領域における線形、もしくは、線形化モデルの固有周波数と固有モードを計算する固有周波数スタディステップと、低次モデル行列をエクスポートするための低次モードモデルスタディステップの2つのスタディステップからなります。

### スタディ 1

- ステップ 1: 固有周波数
- ステップ 2: 低次モードモデル

### 結果

- データセット
- ビュー
- 計算値
  - システム行列 1

### 出力

- 行列: 剛性行列 (Kr)
- フォーマット: 剛性行列 (Kr)  
ダンピング行列 (Dr)  
ダンピング率行列 (Dra)  
質量行列 (Er)

=評価ボタンをクリックする。

固有モード 6 個で、密の形式で表示した結果を示す。

メッセージ 進捗 ログ テーブル 1						
2.0965E5	8.5785E-6	-7.7569E-6	1.1008E-5	1.0768E-5	2.6624E-6	-1753.3
1.3682E-5	2.1117E5	4.9223E-6	-6.7961E-7	4.9410E-6	6.4148E-6	-1764.6
3.8422E-6	-7.6438E-6	8.0192E6	1.6212E-5	6.9499E-6	-4.1615E-6	59724
1.1812E-5	-4.0224E-6	2.1279E-5	8.1186E6	-8.6078E-7	-3.0273E-6	-60471
6.2508E-6	-2.2972E-6	-3.3693E-6	4.5054E-6	6.0883E7	1.6676E-4	-4.0777E5
1.1758E-6	-1.7694E-6	-1.0073E-5	5.3826E-6	1.5888E-4	6.2311E7	4.1850E5
-1753.3	-1764.6	59724	-60471	-4.0777E5	4.1850E5	2.0253E8

## 1 1. 線形化バックリング解析

### 1 1. 1 利用場面

構造体は不安定になる臨界荷重をもつ。線形化バックリング解析はその臨界荷重を算出する。

線形化バックリング解析は既定のスタディであり、内容は2つのステップから成る。

- 1) 初期ステップでは、構造に単位大きさの荷重を印加する。
- 2) 固有値問題を解き、臨界荷重を求める。

### 1 1. 2 臨界荷重指数

計算の結果、臨界荷重指数を算出する。

変形は、座屈したときの構造の形状に相当する。

### 1 1. 3 注意点

線形化バックリングの計算を行う場合には、幾何非線形性 を利用しないこと。

応力の非線形性は計算法に含まれており、幾何非線形性を使うと、線形化バックリング解析の計算結果がその前段で利用される荷重のレベルに依存してしまう。

実際のバックリング荷重は、線形化バックリングで計算された荷重値よりもかなり小さい。特に曲がった構造物では注意を要する。

バックリング解析ではフルの3次元モデルを解析すべきである。

## 1 2. ボルトプリテンション解析

定常解析において、ボルトプリテンション解析を行なうことができる。

ここでは、ボルトの予荷重モデリングで利用された自由度をもつ特殊な自由度を利用する。他のスタディではこのような自由度は利用されない。